TEMA 24

Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinómica. Interpolación y extrapolación de datos.

1. Introducción

- A pesar del interés enorme en la resol numérica de probl, el anál. num es joven: nacido década 1940-50, ¿Por qué? Hasta entonces cálculos costoso tiempo y €.
- Justam necesid cálculo intensan fué impulso construir computad 1940
- Abierta posibilid calcular a precio razonable, met num floreciendo
- Ahora conocer valor de func e^x, sen x apretar una tecla
- Antes 1970 ∄ calc, ord ⇝ acceder valores funciones era mediante tablas
- He aquí un fragmento de una tabla del sen x

X	60	65	70	75
sen x	0'8660	0'9063	0'9396	0'9659

- ¿Como hallar sen (72°)?. idea subst fu senx → polinomio P(72)
- El problema de interp. corresponde al que amenudo se plantea se dispone tabla valor f y quer $f(\xi)$ $\xi \notin$ tabla
- A diferencia ajuste funciones solo exigen criterios aprox. interp impone condición gráfica pase por todos puntos.

2. El problema de interpolación

- El problema consiste en dados $n+1$ $x_0, \dots, x_n$ disti f_0, f_n, encontr $P(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ / $P(x_i) = f(x_i)$. x_i se llaman nodos

2.1. Interpolación y extrapolación de datos

- Planteado problem, util $P(x)$ determ $P(\xi)$, $\xi \notin$ tabla, $\xi \in [x_0, x_n]$ int, $\xi \notin$ extrap

2.2. Método de los coeficientes indeterminados

- En primer lugar Th exist $P(x)$
- Th. ... $\exists_1 P(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ / $P(x_i) = y_i$. Dem

Th nos da ∃ y unicid y además método para halla $P(x)$
Ejemplo para tabla

3. Polinomio interpolador de Lagrange

- Met coef ind muy costoso si hay muchos nodos $\rightarrow$ SEL complicad.
- Planteamos otro método, $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\}$ sabemos $\exists_1 P(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ / ....
- Construimos pol de Lagrange $l_i(x) = \frac{\ldots}{\ldots}$, $l_i(x_j) = \{ {0 \atop 1}$
  luego $P(x) = y_0 \cdot l_0(x) + \ldots + y_n \cdot l_n(x)$. Ejemplo

4. La fórmula de Newton. Diferencias divididas

4.1. Construcción del polinomio interpolador por recurrencia

- Hemos visto ya dos métodos, go to see 3ª forma debido I. Newton
- La idea básica construir $P(x)$ pasos sucesivos.
  1º $P_0(x) \in \mathbb{P}_0[x]$ interpola (x_0, y_0), 2º $P_1 \in \mathbb{P}_1[x]$ interp x_0, x_1 y luego P_2 interpola x_0, x_1, x_2 y así hasta llegar $P(x)$ grado $\leq N$
- Notese P_i en cada paso $\exists$ por el th.
- $P_0 = y_0$, hallar P_1 escribimos $P_1 = P_0 + Q_1$, Q_1 grado ≤ 1 y debe anularse en x_0 ya que $P_1(x_0) = P_0(x_0) \ldots$
  $Q_1(x) = c_1(x - x_0)$, determinamos c_1 imponiendo $P_1(x_1) = y_1$
  es decir $y_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1$ despejamos c_1.
- Similar $P_2 = P_1 + Q_2$ / Q_2 grado ≤ 2 anula en x_0, x_1
  $Q_2(x) = c_2(x - x_0)(x - x_1)$, hallar c_2 / $Q_2(x_2) = y_2$
  siguiendo este proceso $P(x) = P_{N-1}(x) + Q_N(x) = P_{N-1} + c_N(x - x_0) \ldots (x - x_{N-1})$

$= \ldots = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots c_N(\ldots$

P comb lineal de $1, (x - x_0), (x \ldots)(\,) \ldots$ base de Newton

4.2. Diferencias divididas

- Vamos a dar un medio de calcular los c_i de Newton.
- Dados $x_0, \ldots, x_n$ y f en nodos, se llama DD de f en los ptos x_i al coef líder interpol.
  Se representa $f[x_0, \ldots, x_N]$, se dice DD de orden n, el valor de DD indep orden argument: $f[1,3] = f[3,1] \ldots$

4.2.1 Cálculo de las DD

- Es claro que $f[x_i] = f(x_i)$. Las DD orden N pueden calcu en términos de las DD orden $N-1$, tal como afirma teorema
  Th. x_i distint $\Rightarrow$ $f[x_0 - x_N] = \dfrac{f[x_1 - x_N] - f[x_0 - x_{N-1}]}{x_N - x_0}$
  Dem (facil) $P(x) = f[x_0] + f[x_1](x - x_0) + \ldots$

4.2.2. Tabla de diferencias divididas

- Usando reiteradamente el th. anterior. Colum izq, colum sigu cada valor tabla se obtiene inmediat^e oeste y noroeste.

$x_0 \quad f[x_0]$
$x_1 \quad f[x_1] \geq f[x_0, x_1]$

Elementos diagon coef de Newton
Ejemplo (Solo tabla) P(x)

5. Comparación entre los distintos métodos

- Hemos visto ya tres métodos: ...
- Coste escribir pols max coef ind, nulo Lagra, medio Newton
- Coste evaluar polin una vez construido: mín coef ind, bajo Newt, ↑ Lagra
- Supongo tener $P(x)$ en $x_0, \dots, x_N$, ahora añadir nodo mas Newton ✓, Lagr, coef no se reutiliza nada.

6. Error en la interpolación

- Nos preguntamos ¿Qué dif hay entre P y f en un pto x?
- Teorema. $f \in C^N([a,b])$ y $\exists f^{N+1}$ en $]a,b[$
$\Rightarrow$ cada $x \in [a,b]$ le corresponde $\xi \mid \min(x_0..,x_n,x) < \xi < \max(..)$
para el cual $f(x) - P(x) = \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_N)$

Dem. $M = \frac{f(x)-P(x)}{\pi(x)}$, constru $F(t) = f(t) - P(t) - M\prod(t-x_i)$

F anula N+2 ptos → Rolle → F' N+1 ceros → F^{N+1} un cero ▫

6.1. Cota del error

$$E(x) = |f(x) - P(x)| \leq \frac{|x-x_0|\dots|x-x_N|}{(N+1)!} K_{N+1} \quad \left(|f^{N+1}| \leq K_{N+1},\ t \in]a,b[\right)$$

Ejemplo. Interpola $f = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

7. Operadores de diferencias

7.1. El operador Δ

- Es frecuente en interp. x_i equiespaciados, forman p. arit., entonces las fórmulas se pueden simplif usando operadores de dif finita.
- El operador más sencillo es el de dif Δ, Fijado h, Δ asociada a una func otra nueva. $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Ejemplo $f(x) = x, x^2$

7.2. Las potencias de Δ

- Operador Δ puede reiterarse $\Delta(\Delta f) = \Delta^2 f$ diff progre 2ª
  Análogam $\Delta^3 = \Delta(\Delta^2 f)$, .. $\Delta^{n+1} = ..$, op diff progre 3ª, 4ª, ..
- Nos preguntamos, ¿cuánto vale $\Delta^2 f(x)$? $... = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$

$$\Delta^3 f = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$ En general $\Delta^n f(x)$.

7.3. Valores de la función a partir de diferencias

- Apartado anterior expresado potenc Δ en términ f, ahora contrario
- $f(x+h) = \Delta f + f$, $f(x+2h) = \Delta^2 f + 2\Delta f + f$, $f(x+nh) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(x)$

7.4. Diferencias y diferencias divididas

- Op diff simplifican mucho fórmulas. Veamos su aplicac. cálculo DD, x_i equies
- $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{\Delta f(x_i)}{h}$, $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dots = \dfrac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}$, $f[x_i, .., x_{i+n}] = \dfrac{\Delta^n f}{n!\, h^n}$

8. Fórmula de Newton para nodos equiespaciados

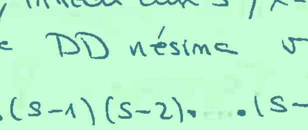
- Supon x_i equiesp y queren int f en x_i por Newton, introdu aux s / $x = x(s) = x_0 + s.h$
- El producto $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{N-1})$ que acompaña DD nésima vale
  $(x_0 + sh - x_0)(x_0 + sh - x_1)\dots(\ \ ) = \dots = h^N \cdot s(s-1)(s-2)\cdot\ \dots \cdot(s-N+1)$
- luego podemos escribir $(x-x_0)\cdot\!\!-\!\!-(x - x_{N-1})\, f[x_0, .., x_N] = s(s-1)\dots(s\cdot)\dfrac{\Delta^N f(x_0)}{N!}$
- y en definitiva la forma de Newton del polinomio interpolador

$$P(x) = P(x_0 + s.h) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + s(s-1)\frac{\Delta^2 f}{2} + \dots + s(s-1)\dots\frac{\Delta^N f}{N!}$$

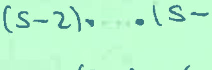
- Podemos ampliar el concepto de nº combinatorio para
  $s \in \mathbb{R}$ y $k = 0, 1, 2, \dots$ $\binom{s}{k} = \dfrac{s(s-1)\cdot\ \dots\ \cdot(s-k+1)}{k!}$

  Ahora podemos escribir $P(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$

9. Interpolación polinómica a trozos. Splines



- A veces pol. int no cubre expectativas desead
- Objetivo evitar esto, interp fun lineal a trozos



  se llama spline lineal, incovenient → no derivable nodos
- Para subsanar esto, splines cuadrátic, cub, cada trozo polin. interpola en $[x_i, x_{i+1}]$ imponiendo trozos enlacen de forma suave.

10. Conclusión

TEMA 24 Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinómica. Interpolación y extrapolación de datos.

1. Introducción

A pesar del interés enorme en la resolución numérica de problemas, el análisis numérico es, como disciplina autónoma, muy joven: ha nacido en la década 1940-1950 ¿Por qué? Hasta entonces efectuar cálculos era muy costoso en tiempo, y por tanto en dinero.

Justamente la necesidad de llevar a cabo cálculos intensamente fué lo que impulsó a concebir y construir los primeros ordenadores en la decada 1940-1950. Abierta la posibilidad de calcular a precio razonable, los métodos numéricos han florecido desde entonces.

Ahora conocer el valor de funciones como e^x, $\operatorname{sen} x$... es cosa de apretar una tecla. Antes de 1970 no había calculadoras ni ordenadores, y la mejor forma de acceder a los valores de las funciones era mediante tablas. He aquí un fragmento de una tabla del $\operatorname{sen} x$

x	60	65	70	75
$\operatorname{sen} x$	0'8660	0'9063	0'9396	0'9659

¿Como hallar $\operatorname{sen}(72°)$? La idea es sustituir la función seno por un polinomio que tome los mismos valores que ella en los puntos de la tabla y luego tomar el valor $P(72)$.

El problema de interpolación corresponde al que a menudo se plantea cuando se dispone de una tabla de valores de una función y se desea obtener valores de dicha función que no están en la tabla. A diferencia del ajuste de funciones, donde sólo se exige que se verifiquen ciertos criterios de aproximación, en el caso de la interpolación se impone la condición de que la gráfica de la función construida pase por los puntos dados.

2. El problema de interpolación

El problema consiste en: dados $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos dos a dos y los correspondientes valores $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ de una función, encontrar un polinomio P de grado $\leq n$ tal que:

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$$

Los x_i se llaman nodos de la interpolación.

2.1. Interpolación y extrapolación de datos

Planteado el problema de interpolar los valores de una función en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tratamos de utilizar el polinomio interpolador P para obtener otros valores distintos de la función de los ~~que~~ que aparecen en la tabla.

Si tratamos de obtener la imagen de un punto situado en el intervalo $[x_0, x_n]$ hablamos de un problema de interpolación. Si por el contrario queremos hallar la imagen de un punto que está fuera del intervalo $[x_0, x_n]$ hablamos de extrapolación.

2.2. Método de los coeficientes indeterminados

En primer lugar mostramos el teorema de existencia del polinomio de interpolación para ~~unase~~ problema de interpolación cualquiera:

Teorema

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ tales que $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j \Rightarrow \exists_1 \, p(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ tal que $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Dem

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n \cdot x^n \in \mathbb{P}_n[x]$

Imponiendo a $p(x)$ las condiciones expuestas obtenemos un SEL de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \dots \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n \cdot x_n^n = y_n \end{cases}$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son las incógnitas

La matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

cuyo determinante es $|A| = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$ que

es el llamado determinante de Vandermonde

y sabemos que $|A| \neq 0$ pues $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.

Luego el SEL es SCD (por el teorema de R.F) ☒

El teorema nos asegura existencia y unicidad de $p(x)$ y nos proporciona un método para hallar $p(x)$, que consiste en plantear y resolver SEL.

Dicho método es llamado el método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo

Hallemos el polinomio que interpola los valores

$f(-1)=0$, $f(0)=-1$, $f(1)=2$ $\quad p(x) = a+bx+cx^2$

Planteamos el siguiente SEL

$$\left\{\begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ a \qquad\quad\;\; = -1 \\ a + b + c = 2 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{a=-1} \quad \boxed{b=1} \quad \boxed{c=2}$$

luego $p(x) = -1 + x + 2x^2$ ✓

3. Polinomio interpolador de Lagrange

El método de los coeficientes indeterminados se hace muy costoso a medida que aumenta el nº de nodos pues los SEL grandes requieren muchos cálculos para resolverlos.

Planteamos otro método para interpolar los datos llamado el polinomio interpolador de Lagrange.

Sean los puntos $\{(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)\}$ que deseamos interpolar. Sabemos que si los puntos tienen abcisas distintas, existe un polinomio de grado $\leq n$ que interpola dichos datos.

Construimos los polinomios de Lagrange

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)},\ i=0,1,\dots,n$$

Fijémonos que $l_i(x)$ es una función polinómica de grado n que toma el valor 0 en x_j, $j\neq i$ y toma el valor 1 en x_i, es decir:

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

Luego el polinomio interpolador que buscamos es $p(x)=y_0\,l_0(x)+y_1\cdot l_1(x)+\dots+y_n\cdot l_n(x)$

Ejemplo

Vamos a interpolar los datos

x_i	0	1	3
y_i	-1	2	3

En primer lugar construimos los polinomios de Lagrange.

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3}$$

$$\ell_1(x) = \frac{x(x-3)}{1\ (1-3)} = \frac{x(x-3)}{-2}$$

$$\ell_2(x) = \frac{x\cdot(x-1)}{3\cdot(3-1)} = \frac{x(x-1)}{6}$$

Luego $P(x) = -1\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{3} + 2\cdot\frac{x(x-3)}{-2} + 3\,\frac{x(x-1)}{6}$

4. La fórmula de Newton. Diferencias divididas

4.1. Construcción del polinomio interpolador por recurrencia

Hemos visto ya dos formas de obtener la solución del problema de interpolación: el método de los coeficientes indeterminados y la formula de Lagrange.

Vamos a ver una tercera forma debida a Isaac Newton.

La idea básica es construir la solución en pasos sucesivos.

Primero construiremos el polinomio P_0 de grado ≤ 0 (es decir constante) que coincide con la función en x_0.

Luego construimos el polinomio P_1 de grado ≤ 1 que coincide con la función en x_0, x_1.

A continuación P_2 de grado ≤ 2 que coincide con la función en x_0, x_1, x_2 y así hasta llegar al

polinomio que buscamos con grado $\leq N$.
Nótese que en cada paso el polinomio P_i existe y es único en virtud del teorema de existencia.
P_0 es constante igual a y_0, $P_0(x) = y_0$.
Para hallar P_1 escribamos $P_1 = P_0 + Q_1$, donde debemos determinar Q_1. El grado de $Q_1 \leq 1$.
Por otro lado Q_1 debe anularse en x_0, ya que $P_1(x_0) = P_0(x_0) = y_0$.
Por ello $Q_1(x)$ debe ser de la forma $c_1(x-x_0)$
Para determinar c_1 imponemos que $P(x_1) = y_1$, es decir $P_0 + c_1\cdot(x_1-x_0) = y_1$ y de aquí despejamos c_1.
La construcción de $P_2(x)$ conocido $P_1(x)$ es similar.
Escribimos $P_2 = P_1 + Q_2$ y hay que determinar Q_2.
Q_2 es de grado ≤ 2 y debe anularse en x_0, x_1, pues en esos nodos P_2 coincide con P_1.
Por ello $Q_2(x) = c_2\cdot(x-x_0)(x-x_1)$ donde c_2 es una constante que se determina imponiendo que $Q_2(x_2) = y_2$, siguiendo este proceso obtenemos

$$P(x) = P_{N-1}(x) + Q_N(x) =$$

$$= P_{N-1}(x) + c_N\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{N-1}) =$$

$$= P_{N-2}(x) + Q_{N-1}(x) + c_N\cdot(x-x_0)\cdot\text{—}\cdot(x-x_{N-1})$$

$$= P_{N-2}(x) + c_{N-1}(x-x_0)\cdot\text{—}\cdot(x-x_{N-2}) +$$

$$+ c_N\cdot(x-x_0)\cdot\text{—}\cdot(x-x_{N-1})$$

y, en definitiva

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots +$$
$$+ c_N(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1})$$

Por consiguiente, P queda ahora escrito como combinación lineal de $1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)\cdots(x-x_{N-1})$ esto ha de compararse con las construcciones anteriores de P donde las bases eran los monomios x^i o la de los l_i.

4.2. Diferencias divididas

Vamos a dar un medio de calcular las constantes c_i que aparecen en la forma de Newton.

- Dados $x_0, \dots, x_n$ distintos dos a dos y dada una función f definida en ellos, se llama diferencia dividida de f en los puntos al coeficiente de x^n en el desarrollo de potencias de x del correspondiente polinomio interpolador. Se representa esta diferencia dividida por $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, se dice que es una diferencia dividida de orden n. El valor de la DD es independiente del orden en que se escriban sus argumentos, pues por ejemplo $f[1,3] = f[3,1]$ ambos son el coeficiente de x en la recta que interpola a la función en $x=1$ y $x=3$ que es lo mismo que interpolarla en $x=3$ y $x=1$.

Cálculo de las diferencias divididas

Es claro que las diferencias divididas de orden cero de una función son los propios valores de la función, $f[x_i] = f(x_i)$. Las diferencias divididas de orden $n \geq 1$ pueden calcularse fácilmente en términos de diferencias de orden $N-1$, tal y como afirma el siguiente teorema, que también explica el nombre "diferencias divididas"

Teorema

Si $x_0, x_1, \dots, x_N$ son puntos distintos dos a dos en los que la función f está definida entonces:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_N] = \frac{f[x_1, \dots, x_N] - f[x_0, \dots, x_{N-1}]}{x_N - x_0}$$

Dem

Construyamos el polinomio interpolador en $x_0, \dots, x_N$ por recurrencia de dos manera: primero añadiendo los nodos en el orden $x_0, x_1, \dots, x_N$ y luego en el orden inverso $x_N, x_{N-1}, \dots, x_0$.

Con el primer orden llegamos a que

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_N](x-x_0)(x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_{N-1})$$

Con el segundo orden llegamos a la expresión que se obtiene al reemplazar en la anterior x_0 por x_N, x_1 por x_{N-1}, .. es decir

$$P(x) = f[x_N] + f[x_N, x_{N-1}](x - x_N) + f[x_N, x_{N-1}, x_{N-2}] \cdot (x-x_N)(x-x_{N-1}) + \dots + f[x_N, x_{N-1}, \dots, x_0](x-x_N)(x-x_{N-1}) \cdots (x-x_1)$$

En el primer desarrollo el coeficiente de x^{N-1} es

$$f[x_0,\dots,x_{N-1}] + f[x_0,\dots,x_N](-x_0-\dots-x_{N-1})$$

y en el segundo desarrollo es

$$f[x_1,\dots,x_N] + f[x_0,\dots,x_N]\cdot(-x_1-\dots-x_N)$$

Igualando ambas expresiones y teniendo en cuenta que los DD no dependen del orden en que se escriban sus argumentos, obtenemos que

$$f[x_0,\dots,x_N] = \frac{f[x_1,\dots,x_N] - f[x_0,\dots,x_{N-1}]}{x_N - x_0} \quad \checkmark$$

Tabla de diferencias divididas

Usando reiteradamente el teorema anterior podemos construir la siguiente tabla. Los números de la columna de la izquierda son las abcisas e inmediatamente a su derecha aparecen los correspondientes valores de la función. Cada uno de los restantes elementos de la tabla se obtiene a partir de los que están inmediatamente a su oeste y a su noroeste

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
x_N & f[x_N] & f[x_{N-1},x_N] & f[x_{N-2},x_{N-1},x_N] & \cdots\ f[x_0 \text{—} x_N]
\end{array}$$

Hallada la tabla, los elementos de la diagonal nos dan los coeficientes por los que hay que multiplicar los polinomios de la base de Newton para formar el polinomio interpolador.

Ejemplo

-1	1			
0	3	$\frac{3-1}{0-(-1)} = 2$		
1	1	$\frac{1-3}{1-0} = -2$	$\frac{-2-2}{1-(-1)} = -2$	
3	9	$\frac{9-1}{3-1} = 4$	$\frac{4-(-2)}{3-0} = 2$	1

Luego $P(x) = 1 + 2\cdot(x+1) - 2(x+1)\cdot x + (x+1)x(x-1)$

5. Comparación entre los distintos métodos

Hemos visto ya tres maneras de construir la solución de un problema de interpolación: coeficientes indeterminados, forma de Lagrange y forma de Newton. Comparemos:

Coste de escribir el polinomio interpolador es máximo con coeficientes indeterminados, pues se requiere resolver un SEL de $(N+1)\times(N+1)$, el coste es nulo para Lagrange e intermedio para Newton, donde hay que construir la tabla de diferencias divididas..

Sin embargo el coste de evaluar el polinomio una vez construido es mínimo para coeficientes indeterminados donde se aplica el algoritmo de Horner, coste bajo para Newton y la forma de Lagrange es la más enojosa de evaluar.

- Supongamos que tenemos hallado el polinomio interpolador de f en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_N$ y deseamos ahora construir el polinomio interpolador en un nodo mas x_{N+1}.

  En la forma de Newton añadimos un termino al polinomio ya obtenido, el coeficiente necesario se obtiene añadiendo una fila a la tabla de D.D ya obtenida anteriormente.

  En Lagrange y ~~Newton~~ coeficientes indeterminados no es posible calcular inmediatamente el nuevo polinomio, reutilizando los cálculos anteriores.

6. Error en la interpolación

Sea $P(x)$ el polinomio interpolador de $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_N$ nos preguntamos ¿Qué diferencia hay entre su valor $P(x)$ en un punto x y el verdadero valor $f(x)$ de la función?

Teorema

Supongamos que f es una función con N derivadas continuas en un intervalo $[a,b]$ y tal que $f^{(N+1)}$ existe en $]a,b[$. Sean $x_0, x_1, \dots, x_N$ nodos en $[a,b]$ distintos dos a dos y sea P el correspondiente polinomio interpolador.

Entonces a cada punto $x \in [a,b]$ le corresponde un punto ξ con

$$\min(x_0, \dots, x_n, x) < \xi < \max(x_0, \dots, x_n, x)$$

para el cual

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)\cdot \dots \cdot (x-x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

<u>Dem</u>

Elijamos un número x en $[a,b]$. Si x es uno de los x_i, la igualdad anterior es evidentemente cierta elijamos como elijamos ξ. Si x no es uno de los nodos, definamos

$$M = \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)\cdot \dots \cdot (x-x_N)}$$

con lo que hay que probar que existe ξ en el intervalo anunciado de forma que

$f^{(N+1)}(\xi) = M \cdot (N+1)!$

Construimos la función auxiliar

$$F(t) = f(t) - P(t) - M(t-x_0)\cdot \dots \cdot (t-x_N)$$

Se tiene que $F^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) - M(N+1)!$

Luego bastará probar que $F^{(N+1)}(t)$ se anula en algún punto del intervalo anunciado.

De la definición de M se sigue que F se anula cuando a su variable t se le da el valor numérico x

Por otro lado F se anula en los $n+1$ nodos x_i.
Apliquemos el teorema de Rolle: puesto que F tiene $N+2$ ceros distintos, su derivada F' tiene $N+1$ ceros (uno entre cada dos de F), la derivada segunda F'' tiene N ceros, ..., y así sucesivamente concluimos que $F^{(N+1)}$ tiene un cero. ✓

6.1. Cota del error

Si además de las hipótesis del teorema anterior suponemos que $|f^{(N+1)}(t)| \leq K_{N+1}$, para cada $t \in]a,b[$, entonces:

$$E(x) = |f(x) - P(x)| \leq \frac{|x-x_0| \cdot \ldots \cdot |x-x_N|}{(N+1)!} K_{N+1}$$

└ error cometido

Ejemplo

Vamos a interpola $f(x) = \sqrt{x}$ en los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 4$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ & & 1/3 \\ 4 & 2 & \end{array} \qquad P(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$$

Aproximamos el valor $\sqrt{3} = f(3) \simeq P(3) = 5/3$

$$\text{Error}(3) \leq \frac{|3-1||3-4|}{2!} k_2 = \frac{1}{4} = 0'25$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \qquad \text{luego } |f''(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in [1,4]$$

7. Operadores de diferencias

7.1. El operador Δ

Es muy frecuente en los problemas de interpolación que las abcisas x_i estén equiespaciadas (formando una progresión aritmética), esto es

$$x_i = x_0 + i.h \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

siendo h positivo. Cuando ocurre esto las fórmulas se pueden simplificar usando los llamados operadores de diferencias finitas.

El operador mas sencillo es el de diferencias progresivas Δ
Fijado un valor de h, el operador Δ asocia a cada función real f una nueva función Δf, del modo

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Por ejemplo para $f(x) = x$, $h=1 \longrightarrow \Delta f(x) = 1$.
Para $f(x) = x^2$, $h=1 \longrightarrow \Delta f(x) = 2x+1$.

7.2. Las potencias de Δ

El operador Δ puede iterarse, es decir se puede aplicar a la función Δf para obtener una nueva función $\Delta(\Delta f)$ que se escribe $\Delta^2 f$. Así se define el nuevo operador Δ^2 que se llama de "diferencias progresivas segundas".

Analogamente $\Delta^3 = \Delta(\Delta^2 f)$ y en general $\Delta^{n+1} = \Delta(\Delta^n f)$ definimos los operadores de diferencias progresivas terceras, 4^{as}...

Nos preguntamos, ¿ cuánto vale $\Delta^2 f(x)$?

Sabemos que $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f(x)) = f(x+2h) - f(x+h) - [f(x+h) - f(x)] =$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Análogamente puede demostrarse que

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

y en general tenemos que

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+(n-k)\cdot h)$$

7.3 Valores de la función a partir de diferencias

En el apartado anterior hemos expresado las potencias de Δ en términos de valores de f.
Vamos ahora a hacer lo contrario, vamos a expresar los valores de f en términos de potencias de Δ.

Sabemos que $f(x+h) = \Delta f(x) + f(x)$

y que $f(x+2h) = \Delta^2 f(x) + 2f(x+h) - f(x)$

de donde $f(x+2h) = \Delta^2 f(x) + 2\Delta f(x) + f(x)$

y, en general podemos obtener la fórmula

$$f(x+n\cdot h) = f(x) + \binom{n}{1}\Delta f(x) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(x) + \dots + \binom{n}{n}\Delta^n f(x).$$

7.4. Diferencias y diferencias divididas

Los operadores de diferencias simplifican mucho las fórmulas. Como ejemplo veamos su aplicación al cálculo de diferencias divididas en el caso de abcisas equiespaciadas, es decir, $x_i = x_0 + i\cdot h$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

y por tanto, para $i = 0, 1, \dots, N-2$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} =$$

$$= \frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}$$

y en general se cumple que

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{\Delta^n f(x_i)}{n! \cdot h^n}$$

8. Fórmula de Newton para abcisas equiespaciadas

Supongamos $x_0, x_1, \dots, x_N$ nodos equiespaciados, y queremos interpolar una función $f(x)$ en dichos nodos por la forma de Newton.

Introducimos una variable auxiliar s tal que $x = x(s) = x_0 + sh$

Entonces los nodos x_i corresponden a valores enteros de s.

El producto $(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{N-1})$ que en la forma de Newton acompaña a la diferencia dividida n-ésima vale:

$$(x_0 + s \cdot h - x_0)(x_0 + s \cdot h - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_0 + sh - x_{N-1}) =$$

$$= (s \cdot h)(\cancel{x_0} + s \cdot h - \cancel{x_0} - h) \cdot \ldots \cdot (\cancel{x_0} + s \cdot h - \cancel{x_0} - (N-1) \cdot h) =$$

$$= h^N \cdot s \cdot (s-1)(s-2) \cdot \ldots \cdot (s - N + 1)$$

Luego podemos escribir

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{N-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_N] = s(s-1) \dots (s - N + 1) \frac{\Delta^N f(x_0)}{N!}$$

y en definitiva la forma de Newton del polinomio interpolador es:

$$P(x) = P(x_0 + s.h) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + s(s-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

$$+ \dots + s(s-1)\cdots(s-N+1)\frac{\Delta^N f(x_0)}{N!}$$

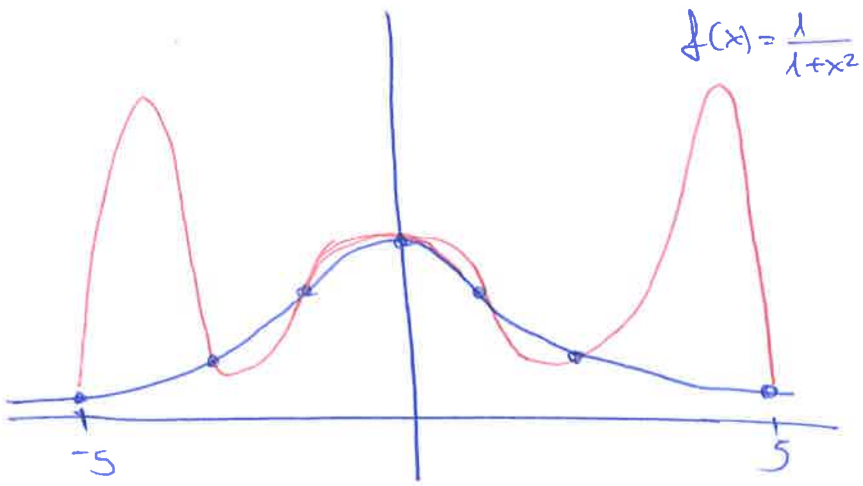
Podemos extender el concepto de número combinatorio para s real y $k = 0, 1, \dots$

como $\binom{s}{k} = \dfrac{s.(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$

Ahora podemos escribir $P(x_0+sh) = \sum_{k=0}^{N} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$

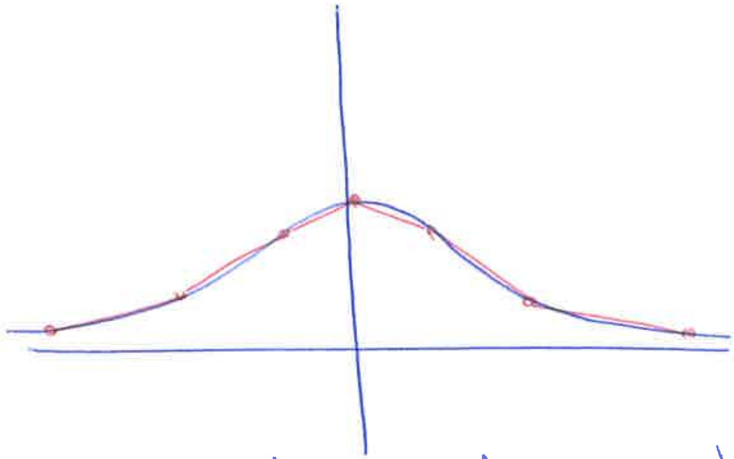
9. Interpolación polinómica a trozos. Splines

A veces el polinomio interpolador no cubre las expectativas deseadas en el sentido de que sí, pasa por los nodos pero en el resto de puntos es muy distinta a la función.

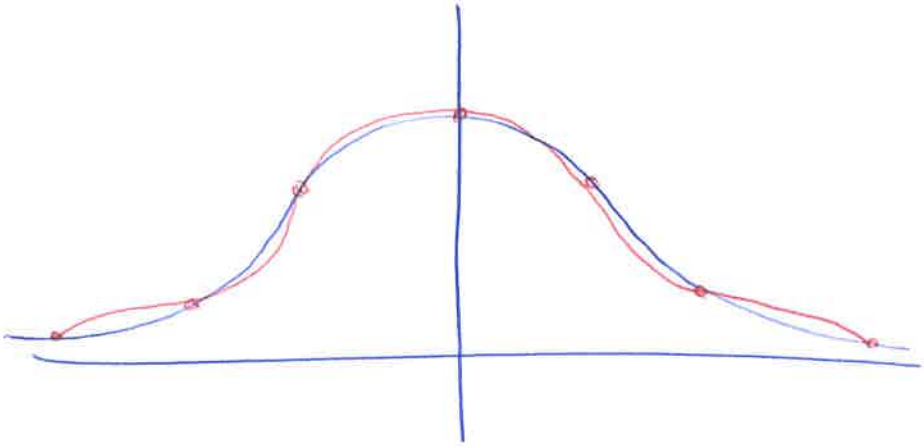


P(x) en extremos de 5 y -5 no aproxima a f

Con el objetivo de evitar estas situaciones interpolamos f con una función lineal a trozos, es decir construimos un interpolante lineal en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.



Al interpolante polinómico de grado 1 se llama también spline lineal.
El inconveniente del spline lineal es que no es derivable en los nodos.
Para subsanar esto, surge los splines cuadráticos, cúbicos ... que son funciones a trozos, ~~cuyo~~ donde cada trozo es un polinomio de grado 2, 3 que interpola un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de dos nodos consecutivos, imponiendo que los trozos enlacen de forma suave (con derivada continua ...)



10 Conclusión

11. Relación con el currículo