TEMA 9

Números complejos. Aplicaciones geométricas.

1. Introducción

- Su $\exists$ y signif rechazados en SXIX por Cauchy, aunque su manipulación en el cálculo establecida desde SXVII y SXVIII por Leibnitz.
- Hasta trabajos Gauss no aceptados como entid. diferenc.
- Soluc cúbica condujo considerac. significativ acerca de nºs complex.
- Euler introdujo símbolo i, soluc $\log$(nº neg)
- Gauss, a partir, Re y Im $\rightarrow$ coordenad pto plano asociado a un nº com
- También, definió nº comp $\rightarrow$ par nº real / toda ec polin $\rightarrow$ soluc $a+bi$

2. El cuerpo de los números complejos

- Consideramos $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $z=(a,b)$, $a=Re(z)$, $b=Im(z)$

2.1. Operaciones

2.1.1. Suma: $z+w = (a,b)+(c,d) = (a+b, c+d)$, i) ii) iii) $(\mathbb{C},+)$ grup

2.1.2. Producto por escalares: $\overset{\mathbb{R}}{\forall\alpha}\,\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$. $\underset{\text{pscl}}{\text{distr}\,11}$ $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ev

2.1.3. Producto: $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ ... distrib $(\mathbb{C},+,\cdot)$ cuerpo

2.2. Isomorfismo de $\mathbb{R}$ con una parte de $\mathbb{C}$

$H = \{(a,b)\in\mathbb{C} / b=0\}$, defi $f:\mathbb{R}\rightarrow H$ $f(a)=(a,0)$ dem is. anillos

Podemos considerar $(\mathbb{R},+,\cdot)$ subcuerpo de . .

2.3. Forma binómica

- $(0,b)$ imaginario puro, $(0,1)$ unidad img, se designa i, $i^2=-1$, $(0,a)=ai$
- Podemos expresar $z=(a,b) = a+bi$ forma binom
- Con forma binómica, realizamos operac sencill z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$.
- $i^2, i^3, i^{4n}, \ldots$, potencia exp entero de complejo $(a+bi) = \sum\binom{n}{k}$

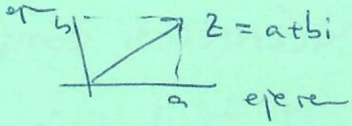
3. Orden en $\mathbb{C}$

- Podemos def ordn en $\mathbb{C}$, no compatibl oper. eje $(a,b)\leq(c,d)$.
- Th. $\nexists$ en $\mathbb{C}$ ordn. Dem (absurdo)

$i\neq 0$, $i>0$ 3 3 , . . ($f(x)=x^3 \uparrow$ conserva ordn)

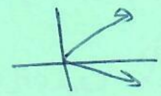
4. El plano complejo

- Los nºs complejos → representamos en el plano. $z = a+ib$ → vector (a,b)
- Eje X → eje real, eje Y → eje imagin.



4.1. Complejos conjugados

- Def $\overline{z} = a - ib$, prop. i) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ii) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ iii) $z + \overline{z} = 0$ Im
  $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, $\overline{z} \cdot z \in \mathbb{R}$
  - En particular, para la forma binómica, inv, cociente fácil mediante producto conjugado divisor
    $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{\quad}{(\ )(\ )}$, $\frac{z}{w} = \dots$
- Geom $\overline{z}$ reflexa z respecto eje real



4.2. Módulo y argumento

- Def $|z| = z \cdot \overline{z} = \sqrt{\cdot} \in \mathbb{R}_0^+$. Geom $|z|$ dist (a,b) a $(0,0)$ ¿ norma del vector (a,b)
- Prop. $|z| = 0$, $|\overline{z}| =$, $|z \cdot w|$, $|z+w|$, $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}\, z|$
- Def $\arg(z)$ como ángulo vector (a,b) con eje X posit.
  si θ argu → $\theta + 2k\pi$ otro arg. $\mathrm{Arg}(z)$, arg principal

4.3. Forma polar

- Un nº complejo se puede expresar $z = a + ib$, pero también
  $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in \mathrm{Arg}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$, ...
- Útil productos, cocient, potenci... Dem $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$ regla.
- Fórmula de De Moivre. Ejemplo $z = -1 + \sqrt{3}i$, ¿z^3?

4.4. Forma exponencial

- Mediante desarrollo en serie de potencias se puede demostrar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. De donde deduce expr exponen del nº complejo $z = r \cdot e^{i\theta}$, $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$.
  Con esta expresión tenemos las siguientes prop:
  i) $z \cdot w = r e^{i\theta} \cdot s \cdot e^{i\beta} = \dots$, $z = r e^{i\theta} \to z^{-1} = \dots$
  iii) $\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}(r \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)}) = \log r + i(\theta + 2k\pi)$

5. Raices de un número complejo

- Se trata de resolver $z^n = w$; $n \geq 2$ natural
- Escribimos z, w polar .... igualamos ... $z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + \dots\right)$
- z_0 raiz n-ésima principal. $\sqrt[n]{w}$. OjO $\sqrt[n]{z \cdot w} \neq \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ en general.
- observese que raíces son vertices de un polígono regular de n lados de radio $\sqrt[n]{|w|}$. Ejemplo. $w = 8(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. 

6. Algunas funciones complejas

- Hablamos de funciones complejas cuando ... $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

6.1. Función exponencial compleja

- La func exponencial real $g(x) = e^x$ cont, deriv cumple prop como $e^{x+y} = \dots$, $e^0 = .$, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- Vamos a definir $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ exponencial complex que extiende a exp re, es decir, $f|_{\mathbb{R}} = g$ y que cumpla sus prop. pretendi
- $f(z) = e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$, veamos que def cumple lo
  a) e^{z+w}, b) $e^0 =$ c) $e^z \neq 0$ d) $f(z)$ $2\pi i$-periód
  e) Formula de Euler $e^{\pi i} + 1 = 0$; continua y derivabl $f'(z) = e^z$
- De la fórmula Euler, deduc $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\operatorname{sen} t = \dots$

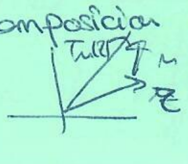
6.2. Logaritmos complejos

- El comportamiento periódico de la exponencial se traduce en que $e^z = w$ tiene infinitas soluciones $w \neq 0$.
  $e^z = w$; $e^{\operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i \operatorname{sen} \operatorname{Im} z)$ de donde deduc ...
- Esta def de logaritmo complejo extiende la def de log real.

7. Aplicaciones geométricas

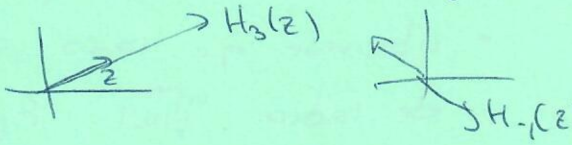
7.1. Traslación

- Sea $u = a + ib \in \mathbb{C}$, def $T_u: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T_u(z) = z + u$, es la traslación de vector $u(a,b)$, es biyectiva que conserva dist, $\nexists$ pt fijos salvo $u = 0$ en cuyo caso T_u aplic identidad y deja todos puntos fijos.
- El cjto de todas las traslaciones con la composición es un grupo abeliano isomorfo a $(\mathbb{C}, +)$.



7.2. Homotecia

- Sea $k \in \mathbb{R}^*$, $h_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $h_k(z) = k \cdot z$
- Esta aplic biyectiva define una correspon / al complejo (a,b) le corresponde (ka, kb) que es una homotecia centro Orig y razón k.
- si $k \neq 1$ solo origen pto fijo
- si $k = 1$ aplicación identidad

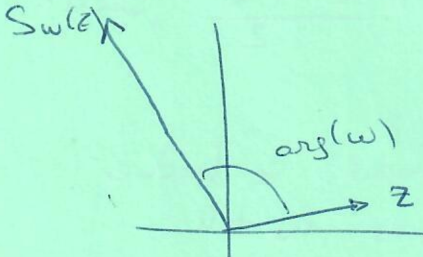


7.3. Giro

- $u \in \mathbb{C} / |u| = 1$, $G_u(z) = u \cdot z$ aplicac giro el áng $\arg(u)$ sent ↺
- $u = 1 \cdot (\cos\theta + \ldots)$, $z = |z|(\cos\varphi \ldots) \to G_u(z) = \ldots$
- $G_u(z)$ mismo modulo que z y hemos sumado los argumentos.
- Solo origen pto fijo, salvo si $\arg(u) = 2\pi k \to G_u$ identidad

7. 4. Semejanza

- Dado $w \in \mathbb{C}$, $S_w(z) = w \cdot z$, la semejz giro o homotecia
- In fact, se produce un giro de $\arg(w)$ ↺ y homot razon $|w|$.
  $S = \{S_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / w \in \mathbb{C}^*\}$ $(S, \circ) \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupos
- Ejemplo si $w = 2(\cos \pi/2 + i \ldots)$



7. 5. Simetrias axiales

- La aplicación $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $c(z) = \bar{z}$ repr sim. axial respect eje real.
- obtener simetría respecto de otro eje, se efectua la composición de esta con la traslac y giro apropiado
- Comp de dos simetrías no es otra simetr, es traslac o giro.

8. Utilización de nºs com. en diferentes campos científicos y tecnológicos

- Usados en modelos mat de proc físicos: pej análisis corriente electric, señales electrónicas
- $z = r \cdot e^{i\theta}$ r amplitud, θ fase onda sinusoidal.
- Intensidad corriente alterna como parte real func complej $f(t) = z \cdot e^{i\omega t}$ ω frecuencia ang, z nos da fase y amplitud. Tb. emplea en formatos de compresión, transmisión banda ancha, ...
- Tool fundam es transformada de Fourier, - Fractales.

TEMA 9. Los números complejos. Aplicaciones geométricas

Alfonso Navas Alcaide

1. Introducción

En relación a los números complejos hay que tener en cuenta que su existencia y significado fueron todavía rechazados en pleno siglo XIX por Cauchy, aunque su manipulación en el cálculo estuviese establecida desde los siglos XVII y XVIII por Leibniz.

Hasta los trabajos de Gauss no empezaron a ser aceptados los números complejos como entidades diferenciadas. La solución de la cúbica condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de los complejos.

Euler introdujo el símbolo i, además contribuyó mediante los números complejos a solucionar el problema de los logaritmos de números negativos.

Gauss, a partir de la parte real e imaginaria de un número complejo, pasó a considerarlos como las coordenadas de un cierto punto del plano que asociaría a dicho número complejo. También definió un complejo como una pareja de números reales de forma que cualquier ecuación polinómica, sea cual sea su grado, admite soluciones del tipo $a + bi$.

2. El cuerpo de los números complejos

Consideramos el conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, así un número complejo z es el par ordenado (a, b) de números reales.

A la primera componente del número complejo $z = (a, b)$ se la llama parte real de z, y a la segunda parte imaginaria de z. Es decir, $Re(z) = a$, $Im(z) = b$.

2.1. Operaciones

SUMA: Sean $z = (a, b),\ w = (c, d) \in \mathbb{C}$, definimos:

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

La suma así definida en $\mathbb{C}$ cumple las propiedades:

a) Asociativa: $(z+w)+h = z+(w+h), \forall z,w,h \in \mathbb{C}$

b) Conmutativa: $z+w = w+z, \forall z,w \in \mathbb{C}$

c) Elemento neutro: $0 = (0,0)$ es el elemento neutro pues

$$0 + z = (0,0) + (a,b) = (a,b) = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

d) Elemento opuesto: sea $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, el elemento opuesto es $-z = (-a,-b)$.

Todas esta propiedades se demuestran fácilmente a partir de las propiedades de $(\mathbb{R},+)$. Luego $(\mathbb{C},+)$ es un grupo abeliano.

PRODUCTO: Sean $z = (a,b),\ w = (c,d) \in \mathbb{C}$, definimos:

$$z \cdot w = (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El producto así definido cumple:

a) Asociativa: $(z \cdot w) \cdot h = z \cdot (w \cdot h), \forall z,w,h \in \mathbb{C}$

b) Conmutativa: $z \cdot w = w \cdot z, \forall z,w \in \mathbb{C}$

c) Distributiva: $z \cdot (w+h) = z \cdot w + z \cdot h, \forall z,w,h \in \mathbb{C}$

d) Elemento neutro: $1 = (1,0)$ es el neutro pues

$$1 \cdot z = (1,0) \cdot (a,b) = (a \cdot 1 - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b) = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

e) Elemento inverso: sea $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, el inverso de z es $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$, pues

$$z \cdot z^{-1} = (a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

Luego $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

PRODUCTO POR ESCALARES REALES: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, definimos:

$$\alpha \cdot z = \alpha \cdot (a,b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$$

a) $\alpha \cdot (z+w) = \alpha \cdot z + \alpha \cdot w$

b) $(\alpha + \beta) \cdot z = \alpha \cdot z + \beta \cdot z$

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot z) = (\alpha \cdot \beta) \cdot z$

Luego $(\mathbb{C},+,\cdot_{\mathbb{R}})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2.2. Isomorfismo de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con una parte de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Sea $H = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid b = 0\} = \{(a, 0) \in \mathbb{C}\}$. Vamos a probar que existe un isomorfismo de anillos entre $\mathbb{R}$ y H.

Definimos $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ como $f(a) = (a, 0)$. Entonces

- $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$
- $f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$

Luego f es un homomorfismo. Además, f es claramente biyectiva, por lo que f es un isomorfismo. Por lo que se puede considerar $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como subcuerpo de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Podemos escribir $(a, 0) = a$.

2.3. Forma binómica

Si un número complejo tiene nula su primera componente, $(0, b)$, se le llama imaginario puro. Se llama unidad imaginaria al número $(0, 1)$ y se le designa por i.

De la definición de producto se deduce que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, esto es, $i^2 = -1$, y también que $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$, por lo que identificamos $(0, a) = a \cdot i$.

Luego podemos expresar cualquier $z \in \mathbb{C}$ de la forma $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$, que es la **forma binómica** del número complejo z.

La forma binómica de un número complejo permite aplicar las mismas reglas operativas que en el campo real. Luego teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, escribimos:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Podemos deducir las potencias sucesivas de i:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$$

y, en general,

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i, \forall n \in \mathbb{N}.$$

También podemos realizar las potencias de exponente entero de un número complejo dado en la forma binómica sin más que utilizar el binomio de Newton y las potencias de la unidad imaginaria.

$$(a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \cdot i^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} bi + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 i^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n i^n$$

3. Orden en $\mathbb{C}$

Podemos definir en $\mathbb{C}$ una relación de orden total pero ninguna de estas relaciones es compatible con las operaciones de $\mathbb{C}$. Por mostrar un ejemplo, podemos definir

$$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a < c \\ \text{ó} \\ a \leq c \wedge b \leq d \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que es una relación de orden total.

Teorema 3.1 *No existe en $\mathbb{C}$ un orden compatible con las operaciones.*

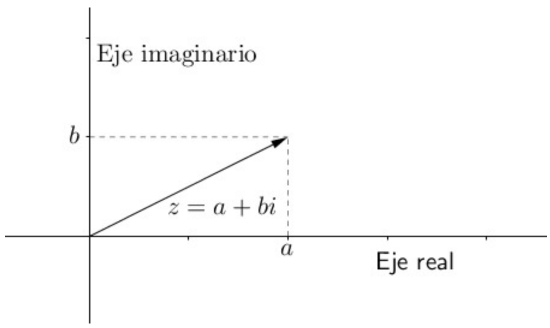
Demostración. (Por reducción al absurdo)
Supongamos $(\mathbb{C}, \leq)$ totalmente ordenado. Entonces, como $i \neq 0$, pueden ocurrir dos casos:

- O bien $i > 0 \Rightarrow$ elevando al cubo, $i^3 > 0 \Rightarrow -i > 0 \Rightarrow i < 0$
- O bien $i < 0 \Rightarrow i^3 < 0 \Rightarrow -i < 0 \Rightarrow i > 0$

(Como $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente, se cumple que si $x < y$, entonces $x^3 < y^3$).
Por tanto, no es posible definir un orden total en $\mathbb{C}$ que sea compatible con las operaciones. $\square$

4. El plano complejo

Los números complejos los representamos en el plano. Un número complejo de la forma $z = a + bi$ lo representamos como el vector (a, b). Al eje X lo llamamos eje real y al eje Y lo llamamos eje imaginario.



4.1. Complejos conjugados

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Llamamos conjugado de z a $\overline{z} = a - bi$, es decir, tiene la misma parte real y opuesta imaginaria.

Propiedades del conjugado:

a) $z = \overline{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

b) $z + \overline{z} \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{C}$

c) $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ es imaginario puro

d) $\overline{\overline{z}} = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$

e) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1},\ \forall z \in \mathbb{C}$

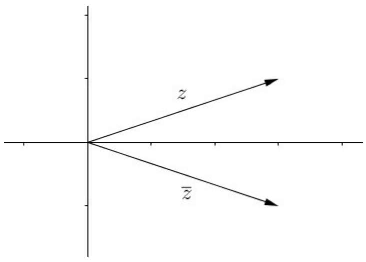
f) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{C}$

En particular, para la forma binómica, el inverso y el cociente se obtienen fácilmente mediante el producto por el conjugado del divisor:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

Por último, señalar que geométricamente $\overline{z}$ es la reflexión de z respecto del eje real.



4.2. Módulo y argumento

Definimos el módulo de $z = a + bi$ como $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_0^+$.

Geométricamente, $|z|$ es la distancia de (a, b) a $(0, 0)$ ó la norma del vector (a, b). El módulo cumple las siguientes propiedades:

a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|\overline{z}| = |z|,\ \forall z \in \mathbb{C}$

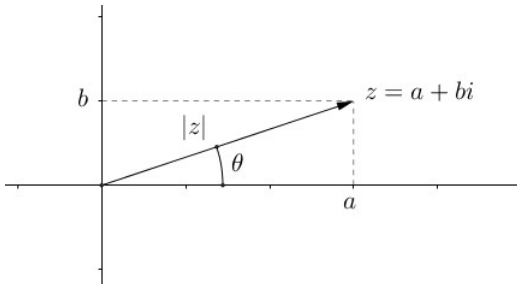
c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,\ \forall z, w \in \mathbb{C}$

d) $|z+w| \leq |z| + |w|,\ \forall z, w \in \mathbb{C}$ (Desigualdad triangular)

e) $|z| \geq |Re(z)|; |z| \geq |Im(z)|$

f) En general, $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$

Definimos argumento de z ($arg(z)$) como el ángulo θ que forma el vector (a, b) con el eje X positivo. Luego $arg(z) \in [0, 2\pi)$.



$|z|$ coincide con el módulo del vector (a, b)

Llamamos argumento principal de z al único argumento de z que pertenece a $[0, 2\pi)$. Lo denotamos $arg(z)$. Llamamos $Arg(z) = \{arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ al conjunto de todos los argumentos de z.

4.3. Forma polar

Un número complejo z se puede expresar como $z = a + bi$, es decir, en forma binómica. Pero también lo podemos expresar como

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\,,\ \ \theta \in Arg(z)$$

donde $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$ y $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$, por lo que se cumple

$$z = a + bi = |z|\cos\theta + i|z|\operatorname{sen}\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Esta es la **forma polar** de un número complejo. Dicha forma es muy útil para realizar productos, cocientes y potencias de números complejos. Veámoslo:

Sean $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $w = |w| \cdot (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. Entonces

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) =$$

$$= |z| \cdot |w| \cdot [(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) + i\,(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi)] =$$

$$= |z \cdot w| \cdot (\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi))$$

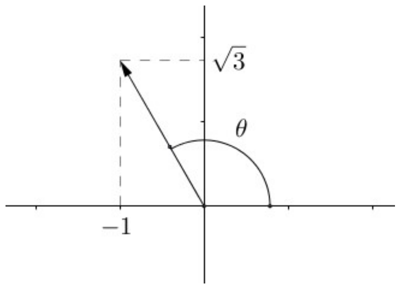
Es decir, para multiplicar números complejos se suman sus argumentos y se multiplican sus módulos. Como consecuencia tenemos también que:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta - \varphi))$$

y la llamada fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: $z = -1 + \sqrt{3}i$



$$\theta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ y } |z| = \sqrt{1+3} = 2.$$

En forma polar tenemos que

$$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Calculamos por ejemplo z^3, haciendo uso de la fórmula de De Moivre, y tenemos que:

$$z^3 = 2^3 \cdot (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = 8 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 8$$

4.4. Forma exponencial

Mediante desarrollo en serie de potencias se puede demostrar que

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

De donde se deduce la **expresión exponencial** de un número complejo:

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{i\theta}, \text{ siendo } r = |z| \text{ y } \theta = arg(z).$$

Con esta expresión, tenemos las siguientes propiedades:

a) $z \cdot w = r \cdot \mathrm{e}^{i\theta} \cdot s \cdot \mathrm{e}^{i\beta} = r \cdot s \cdot \mathrm{e}^{i(\theta+\beta)}$

b) $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\theta} \Rightarrow z^{-1} = r^{-1} \cdot (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$

c) $Log(z) = Log\left(r \cdot \mathrm{e}^{i(\theta+2k\pi)}\right) = \log r + i(\theta + 2k\pi)$

5. Raíces de un número complejo

Se trata de resolver la ecuación $w^n = z$ donde $n \geq 2$ natural y $z \neq 0$. Escribiendo w y z en forma polar, obtenemos

$$|w|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)) = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

De esta igualdad deducimos que $|w|^n = |z|$ y que $n \cdot \varphi = \theta + 2k\pi$, con lo que

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ y } \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Luego dado un número complejo z, tiene exactamente n raíces n-ésimas que son:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \dots, n-1$$

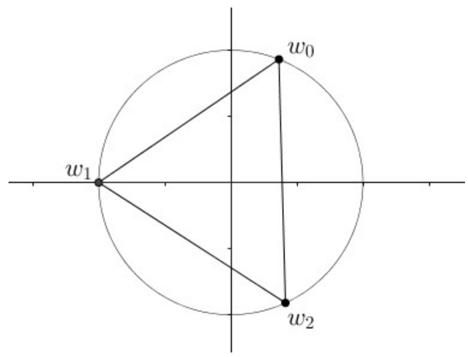
De ente todas las raíces, vamos a designar a

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$$

la raíz n-ésima principal y lo denotamos $\sqrt[n]{z}$ (cuidado pues $\sqrt[n]{z \cdot w} \neq \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$, lo que se cumple es que $\sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ es una raíz de $z \cdot w$).
Obsérvese que las raíces n-ésimas de un número complejo z son los vértices de un polígono regular de n lados de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

Ejemplo: Vamos a calcular las raíces cúbicas de $z = 8 \cdot (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Las raíces cúbicas de z son los números:

- $w_0 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$
- $w_1 = 2 \cdot (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$
- $w_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$



6. Algunas funciones complejas

Hablamos de funciones complejas cuando nos referimos a aplicaciones de la forma $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

6.1. Función exponencial compleja

La función exponencial real $g(x)$ de base e es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, se cumple que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ y que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Vamos a definir $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función exponencial que sea una extensión de la exponencial real y cumpla sus propiedades, es decir, $f\mid_{\mathbb{R}} = g$. Definimos

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+bi} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^{bi} = \mathrm{e}^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

Veamos que esta definición cumple lo pretendido:

a) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w,\ \forall z, w \in \mathbb{C}$

b) $\mathrm{e}^0 = 1$

c) $\mathrm{e}^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$

d) $f(z)$ es una función $2\pi i$-periódica

e) Se cumple la fórmula de Euler: $\mathrm{e}^{\pi i} + 1 = 0$

f) $f'(z) = \mathrm{e}^z$

De la fórmula de Euler tenemos que:

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad \mathrm{e}^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

de donde obtenemos

$$\boxed{\cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}} \qquad \boxed{\operatorname{sen} t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}}$$

que son las funciones seno y coseno complejas.

6.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se traduce en que la ecuación $\mathrm{e}^w = z$, para $z \neq 0$, tiene infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$.

$$\mathrm{e}^w = z$$
$$\mathrm{e}^{Re(w)} \cdot [\cos(Im(w)) + i \operatorname{sen}(Im(w))] = z$$

de donde deducimos que:

a) $\mathrm{e}^{Re(w)} = |z| \Rightarrow Re(w) = \log |z|$

b) $Im(w) = arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Por tanto, existen infinitos complejos w que cumplen $\mathrm{e}^w = z$, y cualquiera de ellos es un logaritmo de z.

$$Log(z) = \{\log |z| + i \cdot (arg(z) + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

es el conjunto de todos los logaritmos de z.
Llamamos logaritmo principal de z al número complejo

$$\log(z) = \log |z| + i \cdot arg(z)$$

Sea $x \in \mathbb{R}^+$, $x = x + 0 \cdot i$, entonces

$$\log(x + 0 \cdot i) = \log |x| + i \cdot 0 = \log x,$$

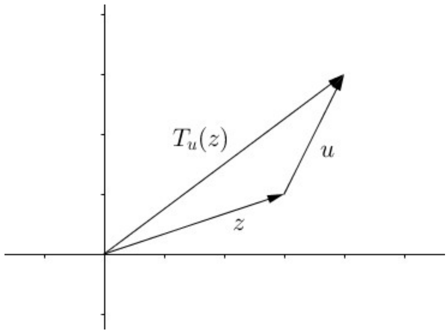
luego esta definición de logaritmo complejo extiende la definición de logaritmo real.

7. Aplicaciones geométricas

7.1. Traslación

Sea $u = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos $T_u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $T_u(z) = z + u$.

- T_u es la traslación de vector $u = (a, b)$ como vector de $\mathbb{R}^2$.
- T_u es una aplicación biyectiva que conserva las distancias.
- En las traslaciones no hay puntos fijos salvo que $u = 0$, en cuyo caso T_u es la aplicación identidad y deja todos los puntos fijos.
- El conjunto de las traslaciones con la composición es un grupo abeliano isomorfo a $(\mathbb{C}, +)$.

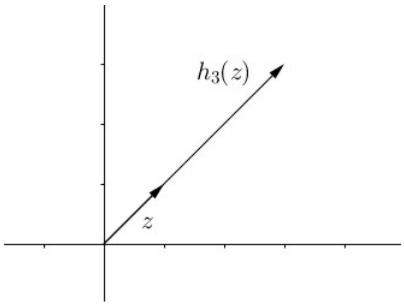


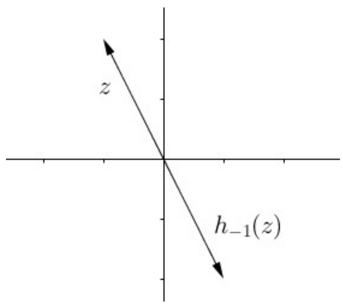
7.2. Homotecia

Sea $k \in \mathbb{R}^*$. Se define $h_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $h_k(z) = kz$.

Esta aplicación biyectiva define una correspondencia tal que al complejo (a, b) le asigna el complejo (ka, kb), que es una homotecia de centro el origen de coordenadas y razón k.

- Si $k \neq 1$, solo el origen es un punto fijo.
- Si $k = 1$, tenemos la aplicación identidad.





7.3. Giro

Sea $u \in \mathbb{C}$ tal que $|u| = 1$, entonces definimos $G_u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $G_u(z) = u \cdot z$.

$G_u(z)$ representa la aplicación de giro con ángulo $arg(u)$ en el sentido antihorario. En efecto, si expresamos u y z en forma polar:

$$u = 1 \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

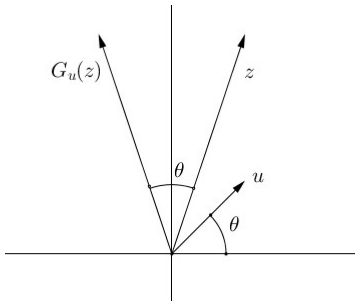
$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

tenemos que

$$G_u(z) = u \cdot z = |z| \cdot (\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi))$$

Así, $G_u(z)$ tiene el mismo módulo que z y hemos sumado los argumentos.

- Solo el origen es un punto fijo, salvo si $arg(u) = 2k\pi$, en cuyo caso $G_u(z)$ es la identidad.



7.4. Semejanza

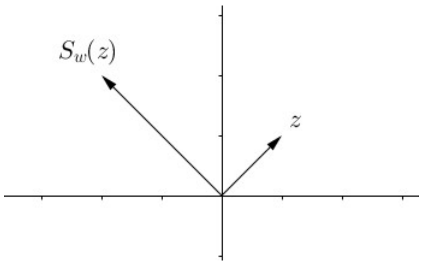
Dado $w \in \mathbb{C}$, consideramos $S_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $S_w(z) = w \cdot z$.

La semejanza es la composición de un giro y una homotecia. De hecho, se produce un giro de ángulo $arg(w)$ en sentido antihorario y una homotecia de razón $|w|$.

$$S = \{S_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid w \in \mathbb{C}^*\}$$

$(S, \circ)$ es un grupo abeliano isomorfo a $(\mathbb{C}^*, \circ)$.

Ejemplo: Si $w = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$



7.5. Simetrías axiales

La aplicación $C : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $C(z) = \overline{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, representa en el plano la simetría axial respecto al eje real.

- Para obtener la simetría respecto al otro eje se efectúa la composición de esta con la traslación y giro oportunos.
- Las simetrías axiales no conservan el sentido de giro.
- La composición de dos simetrías no es otra simetría, es una traslación o un giro.

8. Utilización de los números complejos en diferentes campos científicos y tecnológicos

Los números complejos son usados en modelos matemáticos de procesos físicos. Entre estos procesos está el análisis de corriente eléctrica y las señales electrónicas.

En una expresión del tipo $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\theta}$, podemos pensar en r como la amplitud y en θ como la fase de una onda sinusoidal de una frecuencia dada.

Si se representa la intesidad de una corriente alterna o el voltaje como la parte real de una función de variable compleja de la forma $f(t) = z \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}$, donde ω es la frecuencia angular y el número complejo z nos da la fase y la amplitud, el tratamiento de todas las fórmulas que rigen las resistencias, capacidades e inductores pueden ser unificadas.

Por ejemplo, en los circuitos RLC, la impedancia se representa por

$$z = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) i.$$

Es por eso que se emplea en formatos de compresión, transmisión de banda ancha, amplificadores de señales, procesamiento digital de señales, transmisión eléctrica y en centrales hidroeléctricas.

Una herramienta fundamental es la transformada de Fourier (esta herramienta también se emplea para las aplicaciones anteriores), en la cual se usan intensamente los números complejos.

Los fractales son diseños artísticos de infinita complejidad. En su versión original, se los define a través de cálculos con números complejos en el plano.

El campo complejo es igualmente importante en mecánica cuántica, cuya matemática subyacente utiliza espacios de Hilbert de dimensión infinita sobre el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$.