

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS 1º BACHILLER CCSS

1. Hallar los intervalos de crecimiento, así como los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ b) $f(x) = x^2 \cdot (x-3)^2$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Sol: a) decrece en $(-\infty, \frac{1}{4})$; crece en $(\frac{1}{4}, \infty)$. Mínimo en $x = \frac{1}{4}$ $(\frac{1}{4}, \frac{23}{8})$

b) decrece en $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, 3)$; crece en $(0, \frac{3}{2}) \cup (3, \infty)$. Mínimos en $(0, 0)$ y $(3, 0)$; Máximo en $(\frac{3}{2}, \frac{81}{16})$

c) decrece en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; crece en $(-2, 2)$. Mínimo en $x = -2$ $(-2, \frac{-1}{4})$. Máximo en $x = 2$ $(2, \frac{1}{4})$

d) crece en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$; decrece en $(-2, 0)$. Mínimo en $x = 0$ $(0, 0)$. Máximo en $x = -2$ $(-2, \frac{4}{e^2})$

2. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, hallar el valor de a para que tenga un extremo (máximo o mínimo) en el punto $x = 2$ **Sol:** $a = -3$

3. Obtener los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ presente un mínimo en $(2, 3)$. **Sol:** $a = -3, b = 7$

4. Hallar m , n y p de modo que la función $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ tenga un máximo en $x = -4$, un mínimo en $x = 0$ y pase por el punto $(1, 1)$. **Sol:** $m = 6, n = 0, p = -6$

5. La segunda derivada de un polinomio de segundo grado que pasa por el punto $(1, 17)$ es 4. Hallar el polinomio si se sabe que tiene un mínimo en $x = -1$ **Sol:** $2x^2 + 4x + 11$

6. Descompón 98 en dos sumandos de forma que la suma de sus raíces cuadradas sea máxima. **Sol:** 49 y 49

7. En un concurso nos ha correspondido un campo rectangular. Sus dimensiones debemos fijarlas nosotros con la condición de que su perímetro sea de 400 m. ¿Qué dimensiones debe tener el campo para obtener el máximo de superficie? **Sol:** 100 m de largo y 100 m de ancho

8. Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 m. de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible?

Sol: Radio 5 metros

9. Se desea construir una piscina de fondo cuadrado, con 32 m^3 de capacidad, de manera que la superficie total (de las paredes más el fondo) sea mínima. ¿Qué dimensiones debe tener la piscina?

Sol: Lado de la base = 4 metros. Altura = 2 metros

- 10.** La cantidad de agua (en millones de litros) embalsada en cada momento en cierto pantano durante un año, viene dada a través de la función $f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1}$ $0 \leq t \leq 12$ donde t es el tiempo en meses.
- ¿En qué periodos de tiempo aumentó la cantidad de agua recogida?
 - ¿En qué fecha aproximada estuvo embalsada la mayor cantidad de agua?
 - ¿Cuál fue esa cantidad máxima?

Sol: a) Aumentó en los 6 primeros meses b) Fin de Junio - Comienzo de Julio c) 10 millones de litros

- 11.** Calcula la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión. **Sol:** $y + 3x = 3$

- 12.** Determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ d) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Sol: a) convexa en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$. Cóncava en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Puntos de inflexión en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) cóncava en $(-\infty, 2)$; convexa en $(2, \infty)$. Punto de inflexión en $x = 2$ $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

c) convexa en $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$. Cóncava en $(-2, 3)$. No tiene puntos de inflexión.

d) Cóncava en todo su dominio. No tiene puntos de inflexión.

- 13.** Hallar k sabiendo que la función $f(x) = kx \cdot e^x$ tiene un punto de inflexión en $x = 3$ **Sol:** $k = 0$

- 14.** ¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir con una cuerda de 12 metros? **Sol:** 3m x 3m

- 15.** Halla dos números cuya suma sea 6 unidades y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. **Sol:** 2 y 4

- 16.** En un monasterio se va a abrir una ventana con forma rectangular terminada en un semicírculo. El marco de la ventana mide 8 m. Halla las dimensiones que debe tener para que la cantidad de luz que entre por ella sea máxima.

- 17.** Halla a, b y c de modo que la función $f(x) = kx \cdot e^x$ tenga un mínimo en el punto $(-1, 0)$ y una tangente paralela al eje de abscisas en el punto de abscisa -3 .

- 18.** Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel rectangular de modo que la zona impresa ocupe 100 cm^2 de superficie, el margen superior mida 2 cm y los laterales 4 cm cada uno. Halla las dimensiones del cartel que hagan mínimo el gasto en material.

19. Estudiar completamente y representar gráficamente las siguientes funciones: (En cada caso deberá estudiarse: Dominio, continuidad, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.)

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{4x^2}{1-x^4}$

f) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

g) $f(x) = x^4 - 4x$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$

i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

