

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS 2º BACHILLER DE CIENCIAS

1. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Determina los valores de a , b y c para que la función sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

2. Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.
3. Un trozo de alambre de longitud 20 cm se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura, y con el segundo trozo, se forma un cuadrado. Encuentra las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.
4. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 50 cm^3 . Encuentra las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado.
5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\sin^2 x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

Sol: a) 0 b) $-1/2$ c) $-1/3$ d) $1/2$

6. Hallar una función $f(x)$ sabiendo que su segunda derivada es $6x + 10$ y tal que $f(1) = 7$ y $f(-2) = 13$.

Sol: $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$

7. Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2}$ para $x \neq -1$

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

8. Se desea construir una piscina de fondo cuadrado, con 32 m^3 de capacidad, de manera que la superficie total (de las paredes más el fondo sea mínima). ¿Qué dimensiones debe tener la piscina? **Sol:** 4 y 2

9. Sea la función $f(x) = (x - a) \cdot e^x$

- a) Calcular el valor de a sabiendo que f tiene un punto crítico en $x = 0$. **Sol:** $a = 1$
- b) Para $a = 1$, calcular los puntos de inflexión de la gráfica de f . **Sol:** $x = -1$

10. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{\ln(x)} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin^2(x-4)}{x-4 - e^{x-4}}$

11. Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Hallar la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima. **Sol:** $y - (1/2 + \ln 2) = \frac{1}{4}(x - 2)$

12. Calcula el valor del parámetro k en los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx) - x}{\operatorname{tg}(x)} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg}(x)}{\cos x - 1} = 7$

Sol: a) $k = 4$ b) $k = -7/2$

13. Obtener los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ presente un mínimo en $(2,3)$.

14. Hallar m , n y p de modo que la función $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ tenga un máximo en $x=-4$, un mínimo en $x=0$ y pase por el punto $(1,1)$

15. La segunda derivada de un polinomio de segundo grado que pasa por el punto $(1,17)$ es 4. Hallar el polinomio si se sabe que tiene un mínimo en $x=-1$

16. La empresa "Autos S.A." tiene en exclusiva el modelo *Desastre*. Cada coche le cuesta a la empresa 12000 euros y sabe que en un mes puede vender 30 coches a 16000 €. Un estudio de marketing revela que por cada 200 euros de descuento sobre el precio anterior se venden 2 coches más al mes. ¿A qué precio se deberá vender cada automóvil para maximizar los beneficios?

17. Un fabricante puede producir caramelos a un coste de 5 céntimos cada uno, y estima que si los vende a x céntimos cada uno, sus clientes comprarán, aproximadamente $200 \cdot e^{-x/10}$ caramelos a la semana. Hallar a qué precio debería vender cada caramelo para que el beneficio fuese máximo. ¿Cuál sería entonces dicho beneficio?

18. Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en los puntos de inflexión.

19. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f(x) = \frac{4}{x}$ c) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ e) $f(x) = \operatorname{Ln}(x^2 - 1)$

20. Hallar k sabiendo que la función $f(x) = x \cdot e^{kx}$ tiene un punto de inflexión en $x = -2$.

21. Hallar los valores de a , b , c y d sabiendo que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ presenta un máximo en el punto $(-1, -4)$ y un punto de inflexión en $(1, 4)$.