

DETERMINANTES 2º BACHILLER CCSS

1. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ x & -x & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

2. Hallar el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & a & a & 1 \\ a & a+1 & 1 & 1 \\ a & a+2 & 1 & 2 \\ a & a+3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{Sol: a) 6 b) 1 c) a(1-a)}$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x^4 - 6 & x \\ x^3 - 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 4 & x & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Sol: a) } x = 2 \quad \text{b) } x = \frac{-1}{7} \quad \text{c) } x = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{2}$$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ calcular sin desarrollar:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

5. Hallar X tal que $XB + B = B^{-1}$ siendo $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Sol: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular una matriz C tal que $(X - Y) \cdot C = I$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averiguar para qué valores del parámetro m existe la inversa de A.

Calcular A^{-1} para $m = 2$.

7. Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

8. Hallar k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

9. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3$ calcular:

a) el determinante de $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}^4$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ 2a & 2b & 2c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix}$

10. Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, determina el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$.

11. Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, determina el valor del determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$.

12. Halla, si existe, una matriz A cuadrada de orden 2 que cumpla las siguientes condiciones:

a) Coincide con su traspuesta (es *simétrica*).

b) Verifica la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) Su determinante vale 9.

Sol: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

13. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla la inversa de $A - BC$.

b) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

14. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a .

15. Se dice que dos matrices A y B son *semejantes* si existe una matriz invertible P tal que $A = PBP^{-1}$. Demuestra que si A y B son semejantes, entonces $|A| = |B|$.

16. Se sabe que una matriz simétrica B de dimensión 3×3 tiene como determinante -3 . Determina el determinante de la matriz $B + B^t$ donde B^t denota la traspuesta de B .

17. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ calcular $\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$

18. Calcular λ para que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & \lambda \end{pmatrix}$ sea 2.

19. Una chica contabiliza las horas semanales que dedica a "Clases", "Estudio", "Televisión" y "Salidas" día a día del modo siguiente:

	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab	Dom
Clases	6	5	8	6	5	1	0
Estudio	2	3	1	1	4	2	2
Televisión	1	2	0	2	0	3	4
Salidas	2	1	2	1	4	6	6

La chica y su madre valoran cada hora dedicada a las distintas tareas de la siguiente manera:

$$\text{Chica: } \begin{cases} \text{Clase: } 2 \text{ puntos} \\ \text{Estudio: } 3 \text{ puntos} \\ \text{T.V.: } 1 \text{ punto} \\ \text{Salidas: } 4 \text{ puntos} \end{cases} \quad \text{Madre: } \begin{cases} \text{Clase: } 4 \text{ puntos} \\ \text{Estudio: } 4 \text{ puntos} \\ \text{T.V.: } 0 \text{ punto} \\ \text{Salidas: } 2 \text{ puntos} \end{cases}$$

Construir dos matrices, una que recoja las horas semanales dedicadas a cada tarea y otra que recoja las dos valoraciones. Realizar su producto y dar su significado. ¿Cuál es el día cuyas actividades, en conjunto, valora más la chica? ¿Cuál valora más la madre?

20. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

21. Determina el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}$$

22. Resolver la ecuación matricial $AX + X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

23. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

- Si X es una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la igualdad $X^2 = 2X$, ¿cuánto vale el determinante de X?
- Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si $A^{-1} = A^t$, es decir, $A \cdot A^t = I$. ¿Si A es ortogonal, ¿qué valores puede tomar $\det(A)$?
- Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n tales que $\text{rang}(A) < n$ y $\text{rang}(B) = n$. Demuestra que $\text{rang}(A \cdot B) < n$.